ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik

Prof. Dr. H. Bölcskei
Sternwartstrasse 7
CH-8092 Zürich

Signal- und Systemtheorie I

Herbstsemester 2011

Musterlösung zur Hausaufgabe 11 zum 20.12.2011

Aufgabe 8.8

Es gilt $X_c(j\omega) = 0$ für $|\omega| \geq 2000\pi$. Die Nyquist-Frequenz ist somit $\omega_N = 2 \cdot 2000\pi = 4000\pi$. Mit der Abtastperiode $T = 0.5 \cdot 10^{-3}$ folgt für die Abtastfrequenz $\omega_s = 2\pi/T = 4000\pi = \omega_N$. Da die Ungleichung $\omega_s \geq \omega_N$ erfüllt ist, tritt kein Aliasing auf (keine Überlappung im Frequenzbereich).
Das abgetastete Signal ist

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT) \end{aligned}$$

mit der Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_s(t)\} &= \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT) \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-jnT\omega} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] e^{-jn\theta} \\ &= X_d\left(e^{j\theta}\right) \end{aligned}$$

wobei $\theta = \omega T$ und $X_d\left(e^{j\theta}\right)$ die Fourier-Transformierte des zeitdiskreten Signals $x_d[n] = x_c(nT)$ bezeichnet. Aufgrund des Faltungssatzes der Fourier-Transformation gilt andererseits

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_s(t)\} &= \mathcal{F}\left\{ x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} X_c(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)\right). \end{aligned}$$

Der Vergleich beider Resultate liefert

$$X_d\left(e^{j\theta}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)\right), \qquad \theta = \omega T.$$

Hieraus lassen sich die Eigenschaften von $X_c(j\omega)$ unmittelbar ablesen:

a) $X_c(j\omega)$ ist reell.

b) Aufgrund des Faktors $1/T$ auf der rechten Seite der obigen Gleichung ist das Maximum von $X_c(j\omega)$ gleich T.

c) Der Frequenz $\theta = 3\pi/4$ entspricht $\omega = (3\pi/4)/T = 1500\pi$. Es folgt, dass $X_c(j\omega) = 0$ für $|\omega| \geq 1500\pi$ gilt.

d) $\theta = \pi$ entspricht $\omega = \pi/T = 2000\pi$. Also gilt $X_c(j\omega) = X_c(j(\omega - 2000\pi))$ für $0 \leq \omega < 2000\pi$.

Aufgabe 11.2

a) $X(e^{j\theta})$ lässt sich umschreiben als

$$\begin{aligned} X\big(e^{j\theta}\big) &= \cos^2\theta \\ &= \left(\frac{1}{2}\big(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\big)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2j\theta} + \frac{1}{4}e^{2j\theta}. \end{aligned}$$

Aus der Formelsammlung lässt sich die Fourier-Rücktransformation von $X(e^{j\theta})$ direkt ablesen als

$$x[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{4}\delta[n-2].$$

b) Für $0 \leq |\theta| \leq \pi$ kann $X(e^{j\theta})$ als periodische Faltung

$$X\big(e^{j\theta}\big) = \frac{1}{\theta_g}\int_{-\pi}^{\pi} R\big(e^{j\tau}\big)R\big(e^{j(\theta-\tau)}\big)d\tau$$

umgeschrieben werden. Dabei ist

$$R\big(e^{j\theta}\big) = \begin{cases} 1, & |\theta| \leq \frac{\theta_g}{2} \\ 0, & \frac{\theta_g}{2} < |\theta| \leq \pi \end{cases}$$

die Fourier-Transformierte des Hilfssignals

$$r[n] = \frac{\sin\big(\frac{\theta_g}{2}n\big)}{\pi n}.$$

Da eine periodische Faltung im Frequenzbereich (bis auf einen Faktor 2π) einer Multiplikation im Zeitbereich entspricht, gilt

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{2\pi}{\theta_g}(r[n])^2 \\ &= \frac{2\pi}{\theta_g}\left(\frac{\sin\big(\frac{\theta_g}{2}n\big)}{\pi n}\right)^2. \end{aligned}$$

c) $x[0]$ wird gemäss

$$\begin{aligned} x[0] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\theta})d\theta \\ &= 2\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

berechnet, wobei die Formel für den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks verwendet wurde. Für $n \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)e^{j\theta n}d\theta + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{2\pi-\theta}{\pi}e^{j\theta n}d\theta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{jn}e^{j\theta n}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\theta}{j\pi n}e^{j\theta n}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{\pi n^2}e^{j\theta n}\right]_0^{\pi}\right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{2}{jn}e^{j\theta n}\right]_{\pi}^{2\pi} - \left[\frac{\theta}{j\pi n}e^{j\theta n}\right]_{\pi}^{2\pi} - \left[\frac{1}{\pi n^2}e^{j\theta n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\ &= -\frac{1}{2j\pi n}(1+(-1)^n). \end{aligned}$$

Ein alternativer Lösungsweg ergibt sich aus der folgenden Eigenschaft der zeitdiskreten Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{j\frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta}\right\} = nx[n].$$

Für $n = 0$ ist die rechte Seite der obigen Gleichung gleich null unabhängig von $x[n]$. Somit muss $x[0]$ nach dem ersten Lösungsweg berechnet werden. Für $n \neq 0$ hingegen kann man schreiben

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{j}{n}\mathcal{F}^{-1}\left\{j\frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta}\right\} \\ &= \frac{j}{n}\mathcal{F}^{-1}\left\{\delta_{2\pi}(\theta-\pi)+\delta_{2\pi}(\theta)-\frac{1}{\pi}\right\} \\ &= \frac{j}{n}\left(\frac{1}{2\pi}e^{j\pi n}+\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{\pi}\delta[n]\right) \\ &= \frac{j}{n}\left(\frac{1}{2\pi}e^{j\pi n}+\frac{1}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung folgt, da $\delta[n] = 0$ für $n \neq 0$ gilt. Aus $e^{j\pi n} = (-1)^n$ ergibt sich dann

$$x[n] = -\frac{1}{2j\pi n}(1+(-1)^n).$$

d) Mithilfe einer Partialbruchzerlegung kann man $X(e^{j\theta})$ folgendermassen umformen:

$$\begin{aligned}
X(e^{j\theta}) &= \frac{e^{-j\theta}}{1+\frac{1}{6}e^{-j\theta}-\frac{1}{6}e^{-j2\theta}} \\
&= -\frac{6e^{-j\theta}}{e^{-j2\theta}-e^{-j\theta}-6} \\
&= -\frac{6e^{-j\theta}}{(e^{-j\theta}+2)(e^{-j\theta}-3)} \\
&= \frac{A}{e^{-j\theta}+2}+\frac{B}{e^{-j\theta}-3}
\end{aligned}$$

wobei sich durch Koeffizientenvergleich

$$A=-\frac{12}{5} \qquad B=-\frac{18}{5}$$

ergibt. Mithilfe der Formelsammlung lassen sich nun die einzelnen Terme wie folgt in den Zeitbereich zurücktransformieren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{12}{5}\frac{1}{e^{-j\theta}+2}\right\} &= \mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{6}{5}\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\theta}}\right\} \\
&= -\frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sigma[n]
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{18}{5}\frac{1}{e^{-j\theta}-3}\right\} &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{6}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\theta}}\right\} \\
&= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n\sigma[n],
\end{aligned}$$

womit sich schlussendlich

$$x[n]=\frac{6}{5}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\sigma[n]$$

ergibt.

Aufgabe 11.4

a) Man kann $Y(e^{j\theta})$ als periodische Faltung im Frequenzbereich schreiben und erhält somit

$$Y(e^{j\theta})=\int_{-\pi}^{\pi}G(e^{j(\theta-\Omega)})X(e^{j\Omega})d\Omega$$

wobei $G(e^{j\theta})$ gegeben ist durch

$$G(e^{j\theta})=\begin{cases}1, & 0\le|\theta|\le\frac{\pi}{4}\\ 0, & \frac{\pi}{4}<|\theta|<\pi.\end{cases}$$

Eine Faltung im Frequenzbereich entspricht einer Multiplikation im Zeitbereich (bis auf einen Skalierungsfaktor von 2π). Daher kann das Signal $y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\theta})\}$ geschrieben werden als

$$y[n] = 2\pi g[n]x[n]$$

wobei $g[n]$ die Fourier-Rücktransformierte von $G(e^{j\theta})$ ist. Man findet mithilfe der Formelsammlung, dass

$$g[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}.$$

Somit ist der Zusammenhang zwischen $x[n]$ und $y[n]$ gegeben durch

$$y[n] = 2\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n}x[n].$$

b) Im folgenden bezeichnet $\mathcal{S}\{f[n]\}$ die Antwort des Systems auf ein (beliebiges) Eingangssignal $f[n]$.

Das System ist linear, da

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} &= 2\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n}(\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]) \\ &= \alpha_1 2\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n}x_1[n] + \alpha_2 2\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n}x_2[n] \\ &= \alpha_1\mathcal{S}\{x_1[n]\} + \alpha_2\mathcal{S}\{x_2[n]\}\,.\end{aligned}$$

ii) Das System ist zeitvariant, da

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\{x[n-n_0]\} &= 2\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n}x[n-n_0] \\ &\neq y[n-n_0].\end{aligned}$$

iii) Das System ist kausal, da das Ausgangssignal zu jedem Zeitpunkt n_0 lediglich vom (vergangenen) Eingangssignal $x[n]$ für $n \leq n_0$ abhängt. Genau genommen ist das System sogar gedächtnislos, da $y[n_0]$ nur von $x[n_0]$ abhängt.

iv) Das System ist BIBO-stabil, da für ein beschränktes Eingangssignal $x[n]$ der Betrag des Ausgangssignals ebenfalls beschränkt ist.
Aus $|x[n]| \leq B_x < \infty$ folgt tatsächlich

$$\begin{aligned}|y[n]| &= \left|2\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n}x[n]\right| \\ &= 2\left|\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n}\right||x[n]| \\ &\leq 2\frac{\pi}{4}B_x\end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass

$$\left|\frac{\sin(\alpha n)}{n}\right| \leq \alpha$$

bei $\alpha > 0$ für alle n gilt.

c) Das System ist nicht LTI und kann somit nicht durch eine Impulsantwort beschrieben werden.