

Signal- und Systemtheorie I

Herbstsemester 2011

Musterlösung zur Hausaufgabe 9 zum 6.12.2011

Aufgabe 5.17

a) Es gilt $H(j\omega) = j\omega\hat{H}(j\omega)$ mit

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \omega_0}.$$

Die Fourier-Rücktransformierte von $\hat{H}(j\omega)$ ist (siehe Formelsammlung)

$$\hat{h}(t) = e^{-\omega_0 t} \sigma(t).$$

Der Differentiationssatz der Fourier-Transformation und die Siebeigenschaft der Delta-Funktion ergeben

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d}{dt} \hat{h}(t) \\ &= -\omega_0 e^{-\omega_0 t} \sigma(t) + e^{-\omega_0 t} \delta(t) \\ &= \delta(t) - \omega_0 e^{-\omega_0 t} \sigma(t). \end{aligned}$$

Diagramm für $h(t)$: siehe Musterlösung im Übungsskript.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\ &= \hat{h}(t) \\ &= e^{-\omega_0 t} \sigma(t). \end{aligned}$$

Diagramm für $a(t)$: siehe Musterlösung im Übungsskript.

c) Es gilt $x(t) = -1 + 2\sigma(t+T) - 2\sigma(t-T)$. Da $H(0) = 0$, ist die Antwort des Systems auf ein konstantes Eingangssignal gleich 0. $a(t)$ ist die Antwort des Systems auf das Eingangssignal $\sigma(t)$. Es folgt

$$\begin{aligned} y(t) &= 2a(t+T) - 2a(t-T) \\ &= 2e^{-\omega_0(t+T)} \sigma(t+T) - 2e^{-\omega_0(t-T)} \sigma(t-T). \end{aligned}$$

Diagramm für $y(t)$: siehe Musterlösung im Übungsskript.

Aufgabe 6.2

Das Signal $z(t)$ am Ausgang des Mischers ist gegeben durch $z(t) = x(t) \cos(\omega_{LO}t)$ und kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}z(t) &= A \cos(\omega_{in}t) \cos(\omega_{LO}t) \\&= \frac{A}{2} [\cos(\omega_{in}t + \omega_{LO}t) + \cos(\omega_{in}t - \omega_{LO}t)] \\&= \frac{A}{4} [e^{j(\omega_{in} + \omega_{LO})t} + e^{-j(\omega_{in} + \omega_{LO})t} + e^{j(\omega_{in} - \omega_{LO})t} + e^{-j(\omega_{in} - \omega_{LO})t}].\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformierte $Z(j\omega)$ von $z(t)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}Z(j\omega) &= \frac{A\pi}{2} [\delta(\omega - (\omega_{in} + \omega_{LO})) + \delta(\omega + (\omega_{in} + \omega_{LO})) \\&\quad + \delta(\omega - (\omega_{in} - \omega_{LO})) + \delta(\omega + (\omega_{in} - \omega_{LO}))].\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformierte $Y(j\omega)$ von $y(t)$ erhält man durch Multiplikation von $Z(j\omega)$ mit der Übertragungsfunktion des Bandpassfilters mit der Mittenfrequenz ω_{ZF} . Da $Z(j\omega)$ eine Summe von Dirac-Impulsen an den Stellen $(\omega_{in} + \omega_{LO})$, $-(\omega_{in} + \omega_{LO})$, $(\omega_{LO} - \omega_{in})$ und $-(\omega_{LO} - \omega_{in})$ ist, folgt, dass das Ausgangssignal $y(t)$ die Frequenz ω_{ZF} genau dann beinhaltet, wenn ω_{ZF} die Bedingung

$$\omega_{ZF} = \begin{cases} \omega_{in} + \omega_{LO}, & \omega_{ZF} \geq \omega_{LO} \\ \omega_{LO} - \omega_{in}, & \omega_{ZF} < \omega_{LO} \end{cases}$$

erfüllt. Schliesslich erhält man die zugehörigen Frequenzen des Eingangssignals als

$$\omega_{in} = \begin{cases} \omega_{ZF} - \omega_{LO}, & \omega_{ZF} \geq \omega_{LO} \\ \omega_{LO} - \omega_{ZF}, & \omega_{ZF} < \omega_{LO}. \end{cases}$$

Aufgabe 7.7

Mit $x(t) = e^{-t}\sigma(t) + e^t\sigma(-t)$ wird das zweiseitige Signal $x(t)$ als Summe eines rechtsseitigen und eines linksseitigen Signals geschrieben. Mit Hilfe der Formelsammlung lässt sich dann die Laplace-Transformierte von $x(t)$ als

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} \\&= \frac{-2}{(s+1)(s-1)}\end{aligned}$$

ermitteln. Das zugehörige Konvergenzgebiet ist $-1 < \Re\{s\} < 1$, da $x(t)$ zweiseitig ist. Da das betrachtete LTI-System kausal ist, ist seine Impulsantwort rechtsseitig. Die Übertragungsfunktion $H(s)$ hat genau zwei Pole $s_{1,2} = -1 \pm j$. Es folgt, dass das Konvergenzgebiet von $H(s)$ durch $\Re\{s\} > -1$ gegeben ist. Die Laplace-Transformierte von $y(t)$ ergibt sich als

$$\begin{aligned}Y(s) &= X(s)H(s) \\&= \frac{-2}{(s+1)(s-1)} \frac{s+1}{s^2+2s+2} \\&= \frac{-2}{(s-1)(s^2+2s+2)}.\end{aligned}$$

Somit hat sich ein Pol von $X(s)$ mit einer Nullstelle von $H(s)$ gekürzt. Das Konvergenzgebiet von $Y(s)$ muss die Schnittmenge der Konvergenzgebiete von $X(s)$ und von $H(s)$ beinhalten und ergibt sich somit zu $-1 < \Re\{s\} < 1$.

Zur Laplace-Rücktransformation von $Y(s)$ betrachtet man den Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$Y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}.$$

Der Koeffizientenvergleich

$$As^2 + 2As + 2A + Bs^2 - Bs + Cs - C = -2$$

führt zu $A = -2/5$, $B = 2/5$ und $C = 6/5$, und somit zu

$$Y(s) = \frac{2}{5} \left[-\frac{1}{s-1} + \frac{s+3}{s^2+2s+2} \right].$$

Da $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1^2$ gilt, können wir nun schreiben

$$Y(s) = \frac{2}{5} \left[-\frac{1}{s-1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} + 2\frac{1}{(s+1)^2+1^2} \right].$$

Somit kann die Laplace-Rücktransformation der einzelnen Summanden direkt aus der Formelsammlung abgelesen werden. Dabei muss beachtet werden, dass der erste Summand ein linksseitiges Signal entspricht, während die anderen beiden Summanden rechtsseitige Signale entsprechen. Somit ergibt sich

$$y(t) = \frac{2}{5} [e^t \sigma(-t) + e^{-t} \cos(t) \sigma(t) + 2e^{-t} \sin(t) \sigma(t)].$$