Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik

Prof. Dr. H. Bölcskei
Sternwartstrasse 7
CH-8092 Zürich

Signal- und Systemtheorie I

Herbstsemester 2011

Lösung zu Übung 4

Aufgabe 1

a) Es handelt sich um ein lineares System:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau)(\alpha x_1(t-\tau)+\beta x_2(t-\tau))d\tau \\ &= \alpha\int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau)x_1(t-\tau)d\tau + \beta\int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau)x_2(t-\tau)d\tau \\ &= \alpha\mathcal{S}\{x_1(t)\}+\beta\mathcal{S}\{x_2(t)\}.\end{aligned}$$

b) Das System $\mathcal{S}$ ist im Allgemeinen ein lineares, *zeitvariantes* System, auch LTV-System genannt. Zeitvarianz lässt sich wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\{x(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau)x(t-t_0-\tau)d\tau \\ &\neq y(t-t_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t_0,\tau)x(t-t_0-\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Das System $\mathcal{S}$ ist nur dann ein LTI-System, wenn $g(t,\tau) = g(t-t_0,\tau)$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt. Dies bedeutet, dass $g(t,\tau)$ nicht von t sondern nur von τ abhängt und sich somit als Funktion einer einzigen Variablen darstellen lässt, d.h. $g(t,\tau) = h(\tau)$. In diesem Fall wäre die Eingangs-Ausgangsbeziehung wie folgt durch eine Faltung gegeben:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

c) Ein System ist kausal, wenn das Ausgangssignal zu jedem gegebenen Zeitpunkt t_0 ausschliesslich von Werten des Eingangssignals $x(t)$ für $t \leq t_0$ abhängt. Für das gegebene System $\mathcal{S}$ bedeutet dies, dass $g(t,\tau) = 0$ für alle $\tau < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ gelten muss. In diesem Fall ergibt sich das Ausgangssignal zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 als

$$\begin{aligned}y(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t_0,\tau)x(t_0-\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} g(t_0,\tau)x(t_0-\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Da nur über Werte $\tau \geq 0$ integriert wird, hängt das Ausgangssignal somit nur vom Eingangssignal zu Zeitpunkten $t_0 - \tau \leq t_0$ ab.

d) Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die BIBO-Stabilität des Systems $\mathcal{S}$ ist gegeben durch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t,\tau)| d\tau < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dass diese Bedingung hinreichend ist, lässt sich wie folgt zeigen: Es gelte $|x(t)| \leq B_x < \infty$. Damit ergibt sich für den Betrag des Ausgangssignals:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau) x(t-\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t,\tau)| |x(t-\tau)| d\tau \\ &\leq B_x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t,\tau)| d\tau}_{<\infty} < \infty. \end{aligned}$$

Nun muss noch gezeigt werden, dass die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t,\tau)| d\tau < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ auch notwendig für die BIBO-Stabilität des Systems ist. Man betrachtet dazu das Ausgangssignal zu einem festen Zeitpunkt t_0. Laut Eingangs-Ausgangsbeziehung ist dieses gegeben durch

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t_0,\tau) x(t_0-\tau) d\tau.$$

Wählt man das (beschränkte) Eingangssignal $x(t)$ genau so, dass $x(t) = \text{sign}[g(t_0, t_0 - t)]$ gilt, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} y(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t_0,\tau) x(t_0-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t_0,\tau) \text{sign}[g(t_0,\tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t_0,\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Für BIBO-Stabilität muss $|y(t_0)| < \infty$ gelten. Aus diesem Grund muss auch $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t_0,\tau)| d\tau < \infty$ gelten. Da dies für alle Zeitpunkte $t_0 \in \mathbb{R}$ gelten muss, folgt, dass die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t,\tau)| d\tau < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ notwendig für BIBO-Stabilität ist.

e) Für das gegebene Eingangssignal $x(t) = \delta(t)$ erhält man das zugehörige Ausgangssignal

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{S}\{\delta(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau) \delta(t-\tau) d\tau \\ &= g(t,t) \end{aligned}$$

wobei die Siebeigenschaft der Delta-Funktion verwendet wurde. Die Systemantwort $y(t) = g(t,t)$ charakterisiert das System $\mathcal{S}$ nicht. Für eine vollständige Charakterisierung müsste $g(t,\tau)$ für alle $t, \tau \in \mathbb{R}$ bekannt sein, insbesondere auch für $t \neq \tau$. Bei einem LTI-System hingegen hat $g(t,\tau)$ die Form $g(t,\tau) = h(\tau)$ und hängt somit nur von einem Parameter ab. Für das Eingangssignal $x(t) = \delta(t)$, ist bei einem LTI-System das Ausgangssignal gegeben durch $y(t) = h(t)$. Damit ist ein LTI-System durch die Antwort auf das Signal $x(t) = \delta(t)$ vollständig charakterisiert.